**ZESPÓŁ SZKÓŁ OGÓLNOKSZTAŁCĄCYCH W KAMIENNEJ GÓRZE**

# FILO– MATH

**GAZETKA KOŁA MATEMATYCZNEGO**

**MARZEC 2014** **NR (1)/2014**

## CO W NUMERZE:

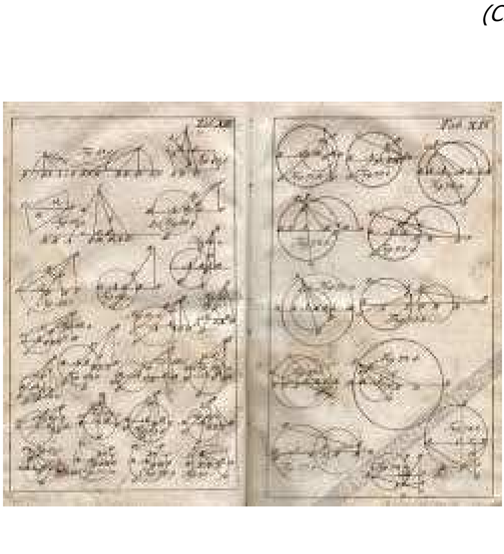
**PRZEGLĄD MATEMATYKÓW:**
Apoloniusz z Pergi .................................................. 1
**MATEMATYKA W INNYCH DZIEDZINACH**
Problemy matematyków ………………………..……………. 2
**DOSWIADCZENIA FIZYCZNE**
Doświadczenia fizyczne ………………………………………. 4
**SCIĄGA**
Ciągi .................................................................... 5
Granica ciągu ....................................................... 6
**ROZRYWKA**
Rebus ................................................................. 6

## PRZEGLĄD MATEMATYKÓW.

### APOLONIUSZ Z PERGII

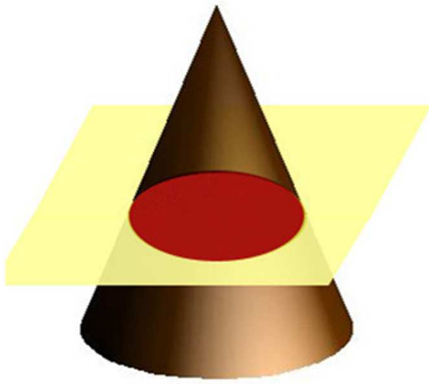
Trzecim z najwybitniejszych matematyków starożytnej Grecji, po Euklidesie i Archimedesie, był Apoloniusz z Pergi. O życiu jego podobnie jak o życiu Euklidesa wiemy bardzo mało. Studiował matematykę w słynnej Szkole Aleksandryjskiej u uczniów Euklidesa. Okres największej jego działalności naukowej przypada około 210 r. p.n.e.

*(Ciąg dalszy na stronie 2)*



(Ciąg dalszy ze strony 1)

Dziełem, które wsławiło jego imię , nadając mu miano Wielkiego Geometry, jest traktat o przecięciach stożkowych „Konica". obliczania objętości pól figur, ograniczonych krzywymi i objętości brył, ograniczonych dowolnymi powierzchniami, czym wsławił się jako prekursor rachunku całkowego, powstałego w dwa tysiące lat później dzięki takim geniuszom jak Leibniz i Newton. W dziele tym naukę o krzywych stożkowych rozwinął on tak dalece, że niewiele pozostaje dodać, by otrzymać stan, w jakim znajduje się ona współcześnie. Zagadnieniem przekrojów stożka zajmowano się przed Apoloniuszem również, lecz on oparł swe badania na bardziej ogólnych założeniach i poddał bardziej szczegółowemu opracowaniu. Jego poprzednicy dokonywali przekrojów stożka kołowego płaszczyznami prostopadłymi do tworzących stożka otrzymując w przekrojach: parabolę, elipsę, hiperbolę – w zależności od tego, czy kąt rozwarcia stożka był, odpowiednio, prosty, ostry, rozwarty. Apoloniusz wykazał, że każdą z powyższych krzywych stożkowych, których nazwy pochodzą od niego, można otrzymać na dowolnym stożku kołowym, dzięki przekrojom różnymi płaszczyznami. Dzieło „Konica" przyćmiło swoim blaskiem wcześniejsze prace dotyczące tego tematu. Tym między innymi można tłumaczyć zaginięcie pracy Euklidesa „O przekrojach stożkowych", jako mało ciekawej w porównaniu z dziełem Apoloniusza. „Konica" składa się z ośmiu ksiąg, z których cztery zachowały się w języku greckim, trzy w tłumaczeniu arabskim. Ostatnia ósma, zaginiona, została odtworzona przez Haleya na podstawie zachowanych komentarzy o niej. O wielkim trudzie włożonym przez autora w to dzieło świadczy fakt, że siedem pierwszych ksiąg zawiera 387 twierdzeń niejednokrotnie dowodzonych w bardzo skomplikowany sposób. Dopiero na gruncie geometrii analitycznej, wprowadzonej blisko 2000 lat później — pod znacznym wpływem pomysłów Apoloniusza — dało się pewne dowody uprościć. I tu zasługa Apoloniusza jako twórcy podwalin geometrii analitycznej jest bezsporna. Był on również astronomem. Zajmował się między innymi ruchem Księżyca, a przydomek „Epsilona", jaki mu nadano, pochodzi podobno stąd, że sierp księżyca jest zbliżony kształtem do litery E. O trwałości dorobku Apoloniusza i wpływie jego dzieł na rozwój matematyki nowożytnej wymownie świadczy fakt, że liczne jego księgi doczekały się tłumaczeń i opracowań przez matematyków tej miary co Viete, Halley, Fermat, Hilbert. Viete przetłumaczył dzieło Apoloniusza „O styczności", które traktuje o problemie styczności trzech okręgów; Halley – „O przekrojach w przestrzeni"; Fermat zajmował się wznowieniem dzieł Apoloniusza. Zdaniem Hilberta, znawcy starożytnej matematyki, Apoloniusz był jednym z tych matematyków, którzy starali się wyzwolić matematykę spod wpływów filozofii platońskiej. Świadczy o tym fakt, że w pewnym swym dziele poświęconym podstawom geometrii starał się on znaleźć powiązanie pojęć matematycznych z otaczającą rzeczywistością. Tak ze śmiercią Apoloniusza kończy się plejada wielkich matematyków starożytności.



*Agnieszka Bieniek*

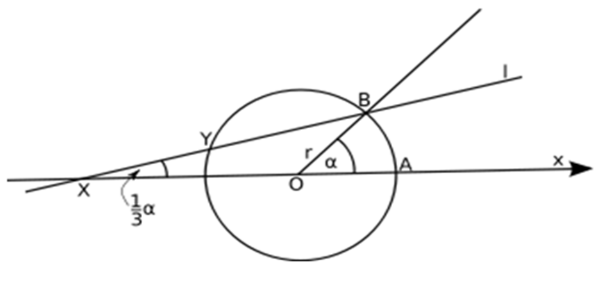
# PROBLEMY STAROŻYTNYCH

## TRYSEKCJA KĄTA

Jeden z trzech wielkich problemów matematyki greckiej. Polega on na podziale kąta na trzy równe części jedynie przy użyciu cyrkla i linijki. Problem ten sięga swoją historią do pitagorejczyków. W związku z konstrukcją wielokątów foremnych interesowali się oni podziałem okręgu na równe części. Podział na 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 równych części udało się im przeprowadzić za pomocą linijki i cyrkla. Natomiast podział okręgu na 7, 9, 11, 13 równych części stwarzał niepokonane trudności. Szczególnie intrygował pitagorejczyków podział na 9 równych części prowadzący do konstrukcji dziewięciokąta foremnego. Aby otrzymać dziewięciokąt foremny, wystarczyłoby tylko odpowiedni kąt środkowy mający 120° podzielić na trzy równe części. Tu więc spotykamy problem trysekcji kąta. Podział tego kąta na 3 równe części nastręczał rozwiązującym niepokonane trudności. Niemożliwe jest podanie metody podzielenia cyrklem i linijka dowolnego kąta na trzy równe części. Kąty dzielą się na takie, które da się podzielić na trzy części cyrklem i linijką (np. 90°), oraz na takie, których cyrklem i linijką nie da się podzielić na trzy równe części (np. 120°). Oczywiście, jeśli użyć odpowiednich narzędzi, to za ich pomocą można dokonać trysekcji dowolnego kąta .

Dowód

Rezygnując z wymogu użycia tylko cyrkla i linijki można dokonać trysekcji kąta ostrego wykorzystując konstrukcję Archimedesa. Używa się do niej cyrkla i linijki z zaznaczonymi dwoma punktami X i Y. Najpierw należy nakreślić okrąg o środku O (gdzie O – wierzchołek kąta) i promieniu . $r = |XY|$ Punkty przecięcia okręgu z ramionami kąta oznaczyć jako A i B. Następnie poprowadzić prostą OA oraz prostą *l* za pomocą linijki tak, aby jeden z zaznaczonych na niej punktów X należał do prostej OA, zaś drugi – punkt Y do okręgu i tak by prosta *l* przechodziła przez punkt B. Wówczas proste OA i przetną się pod kątem $\frac{\alpha}{3}$




## Kwadratura koła

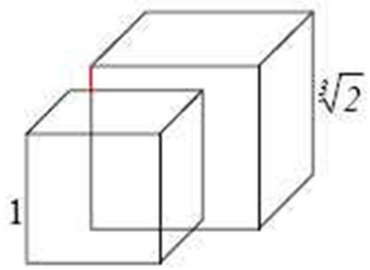
Problem kwadratury koła sformułowano w szkole pitagorejskiej w starożytnej Grecji. Problem ten dotyczył właśnie koła i kwadratu:
*Czy za pomocą linijki i cyrkla można skonstruować kwadrat, który miałby taką samą powierzchnię, co dane koło?*
Tak jak niełatwo było udowodnić, że stosunek między bokiem kwadratu i jego przekątną nie może być wyrażony przez liczbę wymierną, tak samo trudno było wykazać, że podobnie rzecz ma się z kołem. Przez setki lat problemem kwadratury koła zajmowali się matematycy. Nie mogli tego problemu rozwiązać, ani też dowieść, że jest to niewykonalne. Niezliczone próby przedstawienia takiej konstrukcji bez wyjątku kończyły się fiaskiem. Dopiero w drugiej połowie XVIII wieku matematyk Johan Heinrich Lambert ustalił niewymierność liczby π, co oznaczało, że liczby tej nie da się przedstawić pod postacią ułamka zwykłego. Sto lat później, w 1882 roku, Ferdinand von Lindemann udowodnił, że liczba π jest liczbą przestępną. A żadna liczba przestępna nie może być długością odcinka powstałego w wyniku konstrukcji za pomocą linijki i cyrkla.
W ten sposób udowodniono, że jeden z najstarszych problemów matematycznych - kwadratura koła jest niemożliwa. Kwadratura koła stała się synonimem nierozwiązywalnego zadania. Wyrażenie to weszło do języka potocznego dla określenia skazanych na niepowodzenie prób podejmowanych przez kogoś, kto upiera się, by zrealizować coś niemożliwego.

## Dowód

Konstrukcja taka jest niewykonalna – wynika to z twierdzenia udowodnionego w roku 1837 przez Pierre'a Wantzela oraz faktu wykazanego w 1882 roku przez Lindemanna, iż π jest liczbą przestępną. Kwadratura koła jest bezpośrednio związana z rektyfikacją okręgu: gdyby jedna z tych konstrukcji była wykonalna, oznaczałoby to, że wykonalna jest także druga. Określenie kwadratura koła funkcjonuje również w języku potocznym i oznacza coś niewykonalnego, z góry skazanego na niepowodzenie.

## Problem delijski - podwojenie sześcianu

Polega na zbudowaniu sześcianu o objętości dwa razy większej niż dany.
Legenda mówi, że w czasie zarazy na Delos wyrocznia delficka przekazała proroctwo Apollina, że choroba ustanie, gdy jego ołtarz w świątyni w Delfach zostanie powiększony dwukrotnie. Zrozumiano to w ten sposób, że należy dwukrotnie powiększyć objętość ołtarza, zachowując jego kształt sześcianu. Klasyczne rozwiązanie problemu przy pomocy cyrkla i linijki nie jest możliwe; problem może jednak być rozwiązany przy pomocy metod nieklasycznych, na przykład konchoidografu i konchoidy Nikomedesa lub cysoidy Dioklesa.



W języku algebry problem podwojenia sześcianu sprowadza się do zbudowania odcinka spełniającego równanie , $x^3 = 2a^3$ gdzie ***a*** jest dane. Przyjmując ***a*** za jednostkę, problem sprowadza się do zbudowania pierwiastka 3 stopnia z liczby 2. Nie jest to jednak możliwe: x jest liczbą algebraiczną stopnia 3, podczas gdy teoria mówi, że dana liczba daje się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki wtedy i tylko wtedy, gdy jej stopień nad ciałem liczb wymiernych jest naturalną potęgą liczby 2.

### DOWÓD

Udowodnienie nierozwiązalności problemu sprowadza się mniej więcej do takiego rozumowania: Aby podwoić sześcian o krawędzi *a*, trzeba znaleźć odcinek długości *x*, który odpowiada równaniu $x^3 = 2a^3$. Mamy tu do czynienia z równaniem stopnia trzeciego. Jednak geometria koła i linii prostej nie doprowadza do rozwiązania równań stopnia trzeciego. Zadanie to więc z ograniczeniem, iż ma być wykonane za pomocą cyrkla i linijki jest nierozwiązalne.

*Agnieszka Marmuszewska*

# DOŚWIADCZENIA FIZYCZNE

## ZIMNY WRZĄTEK


Potrzebne materiały:
Słoik lub szklanka z wieczkiem (np. po nutelli),
- Kostki lodu,
- Wrząca woda,
- Bardzo zimna woda.

Sposób wykonania:
1. Do słoika wlej wrzącą wodę (prawie do pełna), zakręć i obróć do góry dnem.
2. Połóż kostki lodu na denku, a następnie polewaj zimną wodą.

### WYJAŚNIENIE

Im niższe ciśnienie, tym niższa tempera wrzenia wody. W słoiku znajdowała się gorąca woda, której temperatura wynosiła prawie 100°C. Po gwałtownym ochłodzeniu słoika, para wodna wywiera mniejsze ciśnienie na jego ścianki i powierzchnię wody. Dlatego też wrzenie zachodzi w niższej temperaturze niż 100°C. Podobne zjawisko obserwujemy na Mount Everest. Tam woda wrze w temperaturze 90°C.

## GÓRA LODOWA POD WODĄ

Potrzebne materiały:
Szklanka do połowy wypełniona wodą,
- Kostka lodu,
- Spirytus salicylowy,
- Woreczek foliowy,
- Nabój z atramentem.

Sposób wykonania:
1. Zabarw wodę w szklance atramentem.
2. Na powierzchnię wody połóż woreczek foliowy.
3. Teraz wlej do szklanki spirytus (napełnij w około 90%).
4. Ostrożnie zabierz woreczek.
5. Na zakończenie wrzuć kostkę lodu.

(Jeżeli zrobiłeś wszystko poprawnie kostka lodu powinna pływać na środku szklanki.)

*Patrycja Bukowska*

# ŚCIĄGA

## CIĄGI

Wzór na n– ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między kolejnymi wyrazami ciągu zachodzi równość

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \qquad \text{dla} \quad n \geq 2$$

Wzór na n– ty wyraz ciągu geometrycznego

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wzór na sumę

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1 \\ n \cdot a & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$$

Między kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi równość

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \qquad \text{dla} \quad n \geq 2$$

## Procent składany

Jeśli kapitał K złożymy na n lat do banku, w którym oprocentowanie rat wynosi p%, to kapitał końcowy K wyrażamy

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

## Granica ciągu

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = h$ to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = g + h$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = g - h$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = g \cdot h$

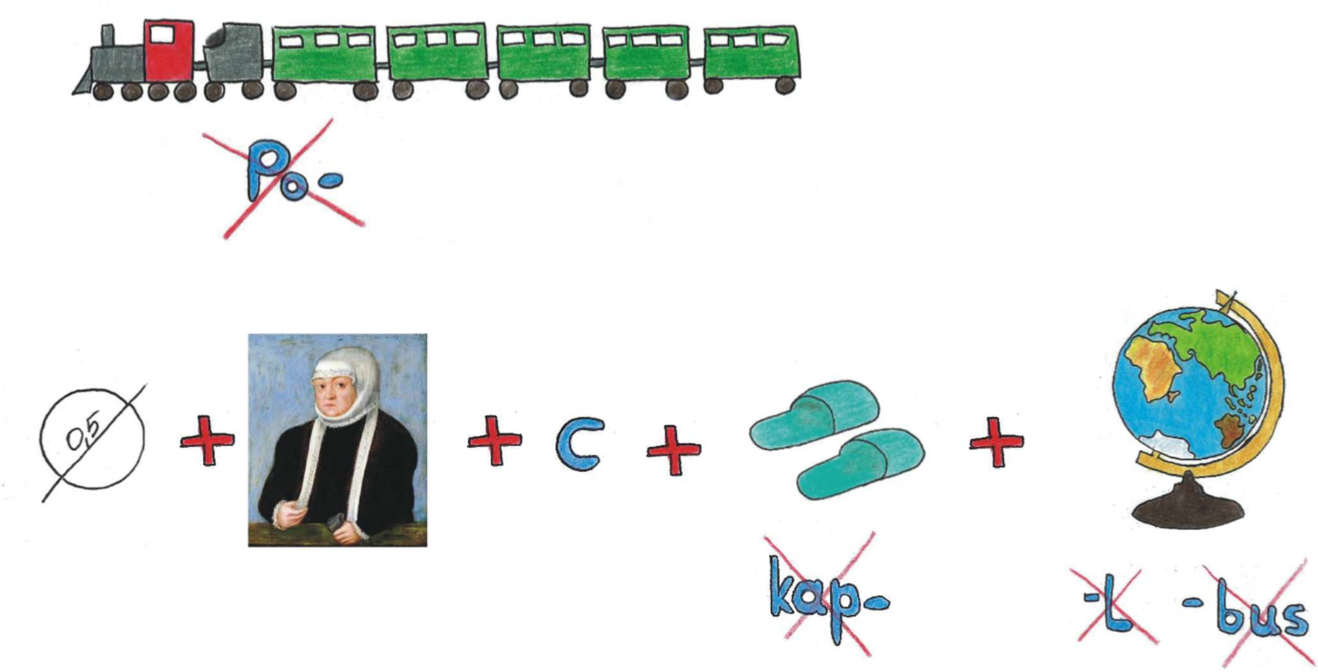
Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $h \neq 0$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g}{h}$

Jeżeli $(a_n)$, $n \geq 1$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie

, to ciąg sum jego początkowych wyzów ma granicę: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$

# Rozrywka

## Rebus




*Emilia Niemasik*

Redaktorzy: Michał Jała, Emilia Niemasik, Patrycja Bukowska, Agnieszka Marmuszewska, Agnieszka Bieniek
Opieka merytoryczna: Danuta Ruchała