

ZESPÓŁ SZKÓŁ OGÓLNOKSZTAŁCĄCYCH  
W KAMIENNEJ GÓRZE

# FILO— MATH

GAZETKA KOŁA MATEMATYCZNEGO

KWIECIEŃ 2014

NR 2 (4)/2014



## CO W NUMERZE:

### PRZEGLĄD MATEMATYKÓW:

John Napier ..... 1

### MATEMATYKA W INNYCH DZIEDZINACH

Zimowa Szkoła Matematyczna 2014 ..... 2

### MDL

Międzynarodowy Dzień Logarytmu ..... 5

### WIECZÓR MATEMATYCZNY

Sprawozdanie ..... 5

### ŚCIAGA

Logarytmy ..... 8

### ROZRYWKA

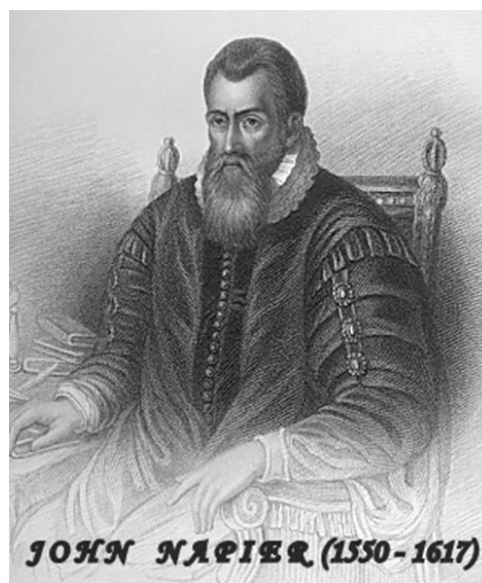
Rebus ..... 9

Hugo Steinhaus– aforyzmy ..... 10

## PRZEGLĄD MATEMATYKÓW.

### JOHN NAPIER

Szkocki właściciel ziemski, antypapista, matematyk, odkrywca logarytmów. Urodził się w 1550 roku w Edynburgu. W wieku 13 lat Napier rozpoczął studia w St. Andrews University. Jeszcze przed ukończeniem studiów wyjechał do Europy kontynentalnej, by pogłębiać swoją wiedzę. Nie wiadomo, gdzie dokładnie odbywał dalsze studia. Wkrótce ożenił się i zamieszkał wraz z żoną w zamku w Gartness.



Napier zajmował się swoim hrabstwem i wprowadzał w nim liczne nowoczesne wynalazki. Matematyka nie była jego profesją, ale hobby. Swoje obserwacje w tym zakresie wymieniał z Jostem Burgiem i Henrym Briggssem. Zmarł w Edynburgu w Szkocji w 1617 roku.

### **Dokonania Johna Napiera**

W dziedzinie matematyki były one imponujące, zwłaszcza jak na kogoś, kto nie zajmował się zawodowo tą nauką.

Do największych zasług możemy zaliczyć:

-odkrycie logarytmów (1614 rok) „Logarytmy” Napiera były powiązane ze „zwykłymi” logarytmami naturalnymi wzorem

$$Nap(x) = 161180957 - 10^7 \ln x$$

-stworzenie tablic logarytmicznych

-opracowanie tablic funkcji trygonometrycznych

-zainteresowanie trygonometrią sferyczną

-zapoczątkowanie graficznego zapisu ułamków w formie kropki dziesiętnej

-wynalezienie pałeczek Napiera (znanych również kostkami) służących do wykonywania mnożenia. Wynalazek ten dał początek suwakowi logarytmicznemu.

sformułowanie algorytmu mnożenia za pomocą dodawania logarytmów. Należy pamiętać, że to właśnie dzięki algorytmowi Napiera Johannes Kepler odkrył zasady ruchu planet, co wpłynęło również na powstanie teorii grawitacji Izaaka Newtona.

*(na podstawie wikipedia)*

## **ZIMOWA SZKOŁA MATEMATYCZNA 2014**

### **„ PRZESTRZENIE METRYCZNE ”**

Zimowa Szkoła Matematyki jest pięciodniowym obozem, poświęconym temu przedmiotowi. Myślę, że należy do tradycji Uniwersytetu Wrocławskiego. W tym roku był to XXIV z kolei obóz naukowy dla uzdolnionej matematycznie młodzieży z Dolnego Śląska i Opolszczyzny. Przez wiele lat brali w nich także udział uczniowie z Niemiec. Organizowane są od 1989 roku. ZSM odbywają się zazwyczaj w drugim tygodniu po zakończeniu szkolnych ferii zimowych. Bierze w nich udział jednorazowo około stu uczniów liceów i wybranych gimnazjów. Zajęcia dydaktyczne podczas ZSM są prowadzone przez studentów, doktorantów i pracowników naukowych Instytutu Matematycznego UWr.

Zarys programu, tegoroczna tematyka:

-co to są przestrzenie metryczne

-nierówność trójkąta

-metryki nieeuklidesowe na płaszczyźnie

-proste w metrykach nieeuklidesowych

-okręgi w metrykach nieeuklidesowych

-stożkowe w metrykach nieeuklidesowych

-proste na sześcianie

-okręgi na sześcianie

-geodezyjne na walcu, stożku i kuli

-okręgi na walcu stożku i kuli

-metryzacja przestrzeni miar probabilistycznych

-zapożyczenie metryki

-symetralna pary zbiorów, otoczka zbioru

-średnica i szerokość figury

-odległość figur i funkcji

-obozowa liga zadaniowa

-warsztaty op-artu

-warsztaty prestidigitatorskie

-logiczna gra terenowa

-wieczór karkonoski (slajdy i minerały)

-wycieczki turystyczno-krajoznawcze

-wizyta w Muzeum Ziemi i w Leśnej Hucie

-kulig i konkurs rzeźb ze śniegu (o ile będą warunki)

-możliwość jazdy na nartach na terenie ośrodka

Zajęcia prowadzili pracownicy, doktoranci i studenci Instytutu Matematycznego UWr oraz przewodnicy sudeccy i zaproszeni nauczyciele.

Przykładowy plan dnia obozu:

**od 8:00** śniadanie

**9:00-10:30 zajęcia**

**A** Proste na sześcianie

**B** Stożkowe w różnych metrykach

**C** Proste na walcu, stożku i kuli

**11:00** wycieczka turystyczno-krajoznawcza:

Leśna Huta, Chata Walońska, Czerwona Jama, Muzeum Ziemi, wodospad Szklarki

**15:00** obiad

**16:30-18:00 zajęcia**

**A** Proste na walcu, stożku i kuli

**B** Proste na sześcianie

**C** Stożkowe w różnych metrykach

**18:30** kolacja



**19:00-20:00 zajęcia**

**AC** Turniej wiedzy erudycyjnej "I Know"

**BC** Minerale Karkonoszy

**20:30-21:30 zajęcia**

**AC** Minerale Karkonoszy

**BC** Turniej wiedzy erudycyjnej "I Know"

Dzień 1 03.03.14

### W GŁÓWNEJ ROLI NIERÓWNOŚĆ TRÓJKĄTA

**Zad.1** W czworokącie wypukłym znaleźć punkt, dla którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

**Zad.2** Na okręgu znaleźć punkt leżący najbliżej (najdalej) od ustalonego punktu wewnątrz okręgu.

**Zad.3** Znaleźć najkrótszy odcinek zawarty między dwoma rozłącznymi zewnątrz okręgami.

**Zad.4** Ze wszystkich trójkątów o wspólnym kącie przy wierzchołku i stałej sumie ramion znajdź trójkąt o najmniejszej podstawie.

**Zad.5** Po jednej stronie prostej MN leżą punkty A i B. Znaleźć na MN punkt C dla którego  $AC + CB$  jest najmniejsze.

**Zad.6** Przez punkt M wewnątrz kąta poprowadzić prostą odcinającą od niego trójkąt o najmniejszym obwodzie.

**Zad.7** Przez punkt M wewnątrz kąta poprowadzić prostą odcinającą od niego trójkąt o najmniejszym polu.

**Zad.8** Wykaż, że jeśli pola kwadratu i trójkąta są równe to obwód trójkąta jest większy.

**Zad.9** Wykaż, że istnieje tylko jeden punkt dla którego suma odległości od ustalonych trzech punktów na płaszczyźnie jest minimalna.

**Zad.10** Wykaż, że punkt dla którego suma odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza nie może leżeć na zewnątrz trójkąta.

**Zad.11** W trójkącie znajdź punkt dla którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

**Zad.12** Wykaż, że  $AW_1 + BW_2 + CW_3 > 2p$ , gdzie  $W_1, W_2$  i  $W_3$  są punktami przecięcia się dwusiecznych kątów A, B i C z okręgiem opisanym na trójkącie ABC.

Jeden z pierwszych wykładów dotyczył nierówności trójkąta. Oto przykładowe zadania:

**Zad.12** Wykaż, że  $AW_1 + BW_2 + CW_3 > 2p$ , gdzie  $W_1, W_2$  i  $W_3$  są punktami przecięcia się dwusiecznych kątów A, B i C z okręgiem opisanym na trójkącie ABC.

Głównym tematem obozu były rodzaje metryk euklidesowych i nieeuklidesowych, ich występowanie i zastosowanie, dlatego też poniżej ukazałam kilka zadań dotyczących tych zagadnień.

1. Narysuj okrąg w metryce euklidesowej o promieniu 6 cm oraz środka w punkcie (2, 5).
2. Czy na okręgu euklidesowym znajdziemy trzy punkty współliniowe?
3. Narysuj  $O_T((2, 2); 3)$ .
4. Czy punkty (2, 5), (3, 4), (5, 2) z okręgu z poprzedniego zadania są współliniowe w metryce euklidesowej, a w taksówkowej?
5. Czy punkty (0, 1), (0, 3), (4, 3) z okręgu z poprzedniego zadania są współliniowe w metryce euklidesowej, a w taksówkowej?
6. Czy istnieją trzy punkty, które są nie-współliniowe w metryce taksówkowej?
7. Podaj środek i promień okręgu w metryce rzeka, którego jedynymi punktami są (3, 5) oraz (3, -1)
8. Narysuj  $O_R((3, -1); 5)$
9. Podaj środek i promień okręgu w metryce rzeka, do którego należą punkty: (2, 5), (3, 2), (5, 0)
10. Narysuj  $O_C((-6, 6); 5)$
- \* 11. Jak mogą wyglądać okręgi w metryce świętej wody?

Obóz nie ograniczał się tylko i wyłącznie do półtoragodzinnych wykładów. Organizowane były także wycieczki oraz różnorakie konkursy, co widać na załączonym planie dnia. Tradycyjnym konkursem są tzw. „Złote Usta” czyli zapisywanie różnych, śmiesznych powiedzonek często wynikających niekiedy z przejęczyzeń podczas zajęć. Wygrywa osoba, której nazwisko pojawia się najwięcej razy na liście konkursowej, bądź wypowie coś, czego nikt z pozostałych uczestników nie jest w stanie przebić.

W tym roku wyniki „rywalizacji” przedstawiają się następująco:

### **ZŁOTE USTA 2014**

Tytuł zdobył Piotr Dyszewski (doktorant IM UW, absolwent II LO w Jeleniej Górze, wychowanek ZSM) za skrzydlatą sentencję:

„Wszystkie rysunki w matematyce kłamią! ...Nazwiecie mnie hipokrytą, ale... zrobię rysunek.”

Inne sentencje nominowane do tytułu:

*Fajnie, że myślicie. Będą wam za to kiedyś dobrze płacić.* [ studentka IM UW]

*Zachodzi równość w nierówności.* [ studentka IM UW]

*Mam zbyt wyraźny podpis na artystę. Musze nad tym jeszcze popracować.* [ uczeń z LO Lubań]

*Przepraszam, że zasłaniam. Postaram się zasłaniać wszystkim po równo.* [ student IM UW]

*To było czerwonym mazakiem, czyli w akcie desperacji. A jaki jest szczyt desperacji? Pisać na tablicy czerwonym permanentem.* [uczennica I LO Jelenia Góra, Małgorzata Mikołajczyk - pracownik IM UW]

Mieliśmy również okazję i przyjemność odbyć zajęcia z iluzjonistą, który przybliżył i zaprezentował nam swoje umiejętności, oraz zapoznał ze sposobem wykonywania różnych sztuczek.

Odwiedził nas także w ośrodku sudecki przewodnik. Podczas zajęć przedstawił nam historię okolicznych gór i szlaków turystycznych oraz opowiedział o minerałach Karkonoszy, prezentując przy tym te, które udało mu się zdobyć.. Prócz tego, że Pan jest przewodnikiem, pasjonuje go również fotografia. Jego zdjęcia wywołują naprawdę ogromne wrażenie i wzbudzają zachwyty.

Tradycyjnie, jak co roku, obóz zakończył się polowaniem na skarb, testem końcowym oraz ogniskiem pożegnalnym . Dziesięć najlepszych wyników zostało odesłanych do szkół, w których uczą się uczestnicy obozu. W tym roku w większości byli to uczniowie z Wrocławia.

*Link do tegorocznego testu wiedzy :*

[http://www.fmw.uni.wroc.pl/sites/default/files/test\\_wiadomosci\\_1.pdf](http://www.fmw.uni.wroc.pl/sites/default/files/test_wiadomosci_1.pdf)

Obóz wywarł na mnie bardzo pozytywne wrażenie. Uważam, że jest to rewelacyjny sposób na nabycie nowej wiedzy w nieco inny sposób, niż na co dzień w szkole. To bardzo dobry przykład na to , że istnieje połączenie przyjemnego z pożytecznym. Polecam i zachęcam do udziału w takich projektach.

*Agnieszka Marmuszevska*

## **MIĘDZYNARODOWY DZIEŃ LOGARYTMU**

W dniu 12 kwietnia 2014 roku obchodzony był Międzynarodowy Dzień Logarytmów. 400 lat temu John Napier odkrył logarytmy i zaprezentował je ówczesnemu środowisku naukowemu.

Z tej okazji Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego przygotował cykl wykładów poświęconych logarytmom.

## **SPRAWOZDANIE Z WIECZORU MATEMATYCZNEGO**

W naszej szkole regularnie odbywają się spotkania z profesorami różnych specjalizacji. Tym razem zaszczylił nas swoją obecnością profesor Uniwersytetu Wrocławskiego Pan Roman Duda - były wiceminister edukacji, senator I kadencji i uczestnik obrad Okrągłego Stołu jak również były rektor Uniwersytetu Wrocławskiego.

Uroczystość rozpoczęła się przywitaniem profesora przez Pana Dyrektora, grono pedagogiczne oraz zaproszonych gości. Następnie profesor wygłosił wykład. Opowiedział o wybitnych matematykach ze Szkoły Lwowskiej. Swoje opowieści wzbogacał anegdotkami i dygresjami. Ukazał matematyków jako zwykłych ludzi, przedstawił nam losy najwybitniejszych polskich uczonych ze Lwowa.



Po skończonym wykładzie nadszedł czas na zadawanie pytań Panu profesorowi oraz program artystyczny, o który zadbali uczniowie naszej szkoły: Olga Więciawska, Katarzyna Homonick, Dorota Jadeszko, Maciej Styra, Tobiasz Fryzowicz i Emilia Niemasik oraz Laura Kowalczyk pod czujnym okiem Pana Wiesława Kozłowskiego oraz nasze Panie matematyczki : Danuta Ruchała, Jolanta Myśliwiec, Sylwia Cierpikowska i Sylwia Gawerda, które wykonały piosenkę „Tylko we Lwowie”.



Na spotkaniu nagrodzeni zostali uczniowie, którzy wykazali się swoją wiedzą w konkursie z zakresu historii matematyki dla uczniów gimnazjów. Trzecie miejsce zajęła Marzena Kuzera z Gimnazjum w Czarnym Borze oraz Dominika Skoczeń z Gimnazjum w Pisarzowicach. Drugie miejsce zdobyła Natalia Szczepanek, a konkurs wygrał Łukasz Mućwicki. Oboje są uczniami naszej szkoły.



Młodzi matematycy dostali zaproszenie od profesora na Katedrę Matematyki na Uniwersytecie Wrocławskim. Wieczór historii matematyki zakończył się podziękowaniami Panu Romanowi Dudzie, oraz wręczeniem drobnych upominków.



*Agnieszka Marmuszevska  
Fot. Jarosław Tułaczyk*

# ŚCIAGA

## LOGARYTMY

Co to jest logarytm?

Jeżeli mamy zależność:

$$a^b = c$$

to znając  $a$  oraz  $c$ , szukamy takiego  $b$ , które spełni nasze równanie. Zapisujemy to:

$$b = \log_a c$$

- odczytujemy jako "b równy jest logarytmowi z c przy podstawie a"

$$a > 0 \text{ i } a \neq 1 \text{ i } c > 0$$

We wzorze  $a$  jest nazywane "podstawą logarytmu".

Logarytm jest funkcją odwrotną do podnoszenia do potęgi o zadanym wykładniku.

Podstawowe zależności (własności) logarytmów, wynikające z definicji.

$\log_m 1 = 0$  logarytm z jedynki (przy dowolnej podstawie) równy jest zero.

$$\log_m m = 1$$

$$\log_m \frac{1}{a} = -\log_m a$$

Podstawa logarytmu

Logarytm może mieć dowolną dodatnią podstawę różną od 1. Są jednak pewne szczególnie ważne w matematyce i technice podstawy logarytmu.

### **Logarytm dziesiętny**

Podstawą logarytmu najczęściej jest liczba 10 (mówimy wtedy o logarytmie dziesiętnym). Zapisujemy go po prostu jako  $\log c$  (bez wypisywania podstawy).

$$\log_{10} c = \log c$$

### **Logarytm naturalny**

Innym ważnym logarytmem jest logarytm naturalny, którego podstawą jest liczba niewymierna oznaczana literą  $e$ . Wartość  $e$  przekracza nieco 2,7 (kto chce poznać więcej miejsc po przecinku może otworzyć windowsowy kalkulator w widoku "naukowym" i wpisać po kolei 1, "inv". "ln" - czyli wciskamy jedynkę, zaznaczamy pole "inv" oraz klikamy przycisk "ln").

Znaczenie logarytmu naturalnego ujawnia się przy posługiwaniu się rachunkiem różniczkowym i całkowym.

Logarytm naturalny oznaczamy przez  $\ln$  (przynajmniej w Polsce, bo anglosasi oznaczają go inaczej) :

$$\log_e b = \ln b.$$

### **Wzory z logarytmami**

Definicja:

$$b = \log_a c, \text{ jeśli: } a^b = c$$

logarytm iloczynu i ilorazu:

$$\log_m a \cdot b = \log_m a + \log_m b$$

$$\log_m \frac{d}{b} = \log_m d - \log_m b$$

logarytm potęgi:

$$\log_m a^b = b \cdot \log_m a$$

Oczywiście wzory powyższe obowiązują w ich dziesiętnej i naturalnej odmianie np.:

$$\log a \cdot b = \log a + \log b,$$

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b,$$

$$\log a^b = b \cdot \log a,$$

$$\ln a^b = b \cdot \ln a \text{ itp.}$$



### Liczba e

Liczba **e** zwana jest **liczbą Eulera** lub **liczbą Napera**. Można ją zdefiniować na kilka równoważnych sposobów. Między innymi jako:

**Granice ciągu:** 
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

**Sumę szeregu:** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$
 gdzie  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$  oraz  $0! = 1$

Powyższy wzór można z powodzeniem wykorzystywać do obliczania wartości liczby **e** z dużą dokładnością. Suma zaledwie 10 pierwszych wyrazów tego szeregu, daje całkiem niezłe oszacowanie liczby Eulera.

**Jedyną liczbę rzeczywistą, taką że**  $\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$  **to znaczy, że liczba e to taka, że pole powierzchni pod**  
hiperbolą  $f(t) = \frac{1}{t}$  **od 1 do e jest równe 1.**

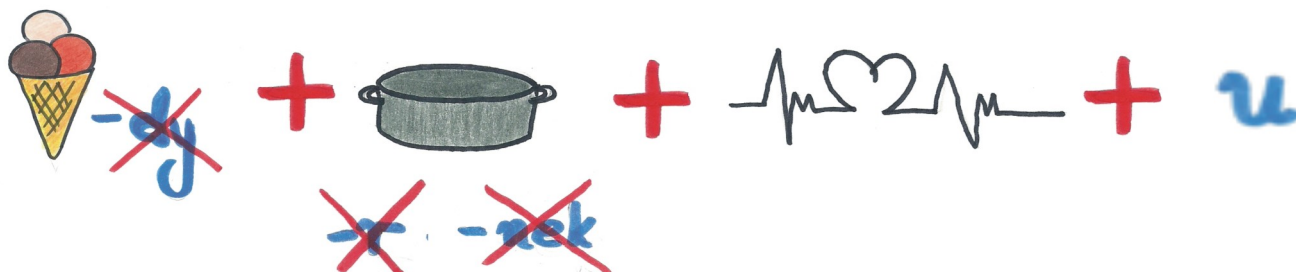
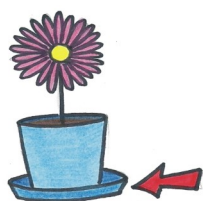
**Jako argument funkcji**  $f(x) = x^{1/x}, x > 0$  **dla którego jej wartość jest największa.**

(na podstawie wikipedia)

## ROZRYWKA

### REBUS





### HUGO STEINHAUS – AFORYZMY

- Mędrzec widzi w lustrze głupca, głupiec przeciwnie.
- Nieszczęście mierzy się tą samą miarą, co szczęście.
- Tylko nieuzasadniona zarozumiałość jest uzasadniona.
- Unikaj skarżącego się na brak czasu, chce ci zabrać twój.
- Dowcipem nie należy celować, tylko trafiać.
- Kula u nogi – Ziemia.
- Łatwo z domu rzeczywistości zejść do lasu matematyki, ale nieliczni tylko umieją wrócić.
- Dowcip jest szyfrem; selekcjonuje automatycznie i bezbłędnie adresatów.
- Matematyka podobna jest do wieży, której fundamenty położono przed wiekami, a do której dobudowuje się coraz wyższe piętra. Aby zobaczyć postęp budowy, trzeba iść na piętro najwyższe, a schody są strome i składają się z licznych stopni. Rzeczą popularyzatora jest zabrać słuchacza do windy, z której nie zobaczy ani pośrednich pięter, ani pracą wieków ozdobionych komnat, ale przekona się, że gmach jest wysoki i że wciąż rośnie.
- Moim największym odkryciem matematycznym jest Stefan Banach.
- Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary w potęgę umysłu ludzkiego, jak matematyka.
  
- Dobrzy matematycy widzą analogie między twierdzeniami, lepsi między teoriami, ale najlepsi widzą analogie między analogiami. **Stefan Banach**

Redaktorzy: Michał Jała, Emilia Niemasik, Agnieszka Marmuszevska,  
Opieka merytoryczna: Danuta Ruchała